Ορισμός: Ας είναι α, β σύνολα, διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο στοιχείο α και δεύτερο στοιχείο β ονομάζουμε το σύνολο $\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}$ και το συμβολίζουμε ως (α, β).

Δηλαδή $\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\} = (\alpha, \beta)$

Ας είναι A, B κλάσεις: Τότε ορίζουμε την πράξη $A \times B$ την οποία ονομάζουμε ως καρτεσιανό γινόμενο των κλάσεων A και B, και έχουμε ότι

$$A \times B = \{(x, y) : (x \in A) \land (y \in B)\}$$

Πρόταση: Το καρτεσιανό γινόμενο δυο συνόλων είναι σύνολο

Απόδειξη: Ας είναι A, B σύνολα. Έστω $\alpha \in A$ και $\beta \in B$.
Τότε $\alpha \in A \land A \subseteq A \cup B \Rightarrow \alpha \in A \cup B \Rightarrow \{\alpha\} \subseteq A \cup B$
$\Rightarrow \{\alpha\} \in P(A \cup B)$ (1). Επιπλέον $\{\alpha, \beta\} \subseteq A \cup B \Rightarrow \{\alpha, \beta\} \in P(A \cup B)$

$\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\} \subseteq P(A \cup B) \Rightarrow (\alpha, \beta) \subseteq P(A \cup B)$
$\Rightarrow (\alpha, \beta) \in P(P(A \cup B))$

$\Rightarrow A \times B \subseteq P(P(A \cup B)) \Rightarrow A \times B$ σύνολο

Άσκηση 1 (11 Βιβλίου): Ας είναι A και B κλάσεις. -3-

Νδο $A\times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A\neq\emptyset$ και $B\neq\emptyset$

Λύση: Αν $A\times B\neq 0 \Rightarrow \exists w: w\in A\times B$. άρα $(\exists a\in A)\wedge(b\in B)$ $: w=(a,b) \Rightarrow A\neq\emptyset \wedge B\neq\emptyset$

Αν $A\neq\emptyset\wedge B\neq\emptyset \Rightarrow (\exists a\in A)\wedge(\exists b\in B)$ Θεωρούμε το $w=(a,b) \Rightarrow w\in A\times B \Rightarrow A\times B\neq\emptyset$

Άσκηση 2 (14 Βιβλίου): Ας είναι a, b σύνολα

Νδο: (1) $\bigcap\bigcap(a,b)=a$

(2) $\left(\bigcap\bigcup(a,b)\right)\cup\left(\bigcup\bigcup(a,b) \setminus \bigcup\bigcap(a,b)\right)=b$

(1) $\bigcap(a,b)= \bigcap\{\{a\},\{a,b\}\} = \{x: \forall y\in\{\{a\},\{a,b\}\} \Rightarrow x\in y\}$
$=\{x: x\in\{a\}\wedge x\in\{a,b\}\} = \{a\}\cap\{a,b\} = \{a\}$

Άρα $\bigcap\bigcap(a,b)=\bigcap\{a\}=a$

(2) $\bigcup(a,b)=\{x: \exists y\in\{\{a\},\{a,b\}\} : x\in y\}$
$\Rightarrow \{x: x\in\{a\} \vee x\in\{a,b\}\} = \{a\}\cup\{a,b\}$
$=\{a,b\}$

$\bigcap\{a,b\} = \boxed{a\cap b}$

$\cup(a,b) = \{a,b\}$ | $\cap(a,b) = \{a\}$

$\cup\{a,b\} = \boxed{a\cup b}$ | $\cup\{a\} = \boxed{a}$

$(a\cap b)\cup((a\cup b)\setminus a)$

$=(a\cap b)\cup((a\setminus a)\cup(b\setminus a))$

$=(a\cap b)\cup(b\setminus a)=b$

Ορισμός: Σχέση ονομάζουμε μια κλάση από διατεταγμένα ζεύγη.

σύνολο πρώτων μελών της σχέσης

Πεδίο Ορισμού σχέσης: $D(R)=\{x : (\exists y)\ (x,y)\in R\}$

Πεδίο Τιμών σχέσης: $R(R)=\{y : \exists x\ (x,y)\in R\}$ ⇒ σύνολο δεύτερων μελών σχέσης

Άσκηση 15: Αν R σχέση, R σύνολο νδο $D(R)$ και $R(R)$ σύνολα

<u>Λύση</u>: Έστω τυχόν $(x,y)\in R \Rightarrow x\in D(R)\ \&\ y\in R(R)$

Τότε $(x,y)\in R \Rightarrow \{\{x\},\{x,y\}\}\in R \Rightarrow$ $\{x\}\in \cup R \Rightarrow x\in\cup\cup R$

$\{y\}\in\cup R \Rightarrow y\in\cup\cup R$

Τότε $D(R)\subseteq \cup\cup R\ (1)$, $R(R)\subseteq\cup\cup R\ (2)$ Όμως R σύνολο $\Rightarrow \cup R$ σύνολο λόγω αξιώματος 5 $\Rightarrow \cup\cup R$ σύνολο

Λόγω Αξιώματος 3 και λόγω (1) $\Rightarrow D(R)$ σύνολο

Λόγω Αξιώματος 3 και λόγω (2) $\Rightarrow R(R)$ σύνολο.

Ας είναι A, B κλάσεις τότε η σχέση μεταξύ των A και B είναι υποσύνολο του $A\times B$.

Scanned by CamScanner

Ορισμός: Έστω σχέση R. Ονομάζουμε αντίστροφη σχέση και συμβολίζουμε με R^{-1} το $R^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in R\}$

Προφανώς $D(R)=R(R^{-1}) \wedge D(R^{-1})=R(R)$

Ορισμός: Έστω R και S δύο σχέσεις, τότε ονομάζουμε σύνθεση και συμβολίζουμε με $S\circ R$ (σύνθεση των S και R) τη σχέση $S\circ R=\{(x,z): \exists y \ (x,y)\in R \wedge (y,z)\in S\}$

Πρόταση: Να δειχθεί ότι (i) $D(S\circ R)\subseteq D(R) \wedge$ (ii) $R(S\circ R)\subseteq R(S)$

Απόδειξη: (i) Έστω $\boxed{x\in D(S\circ R)}$ και $x\notin D(R)$ τότε όπως

$S\circ R=\{(x,z): \exists y \ (x,y)\in R \wedge (y,z)\in S\}$

$\Rightarrow (x,y)\in R \wedge (y,z)\in S \wedge x\notin D(R)$

$\Rightarrow (x,y)\in R \wedge (y,z)\in S \wedge (x,y)\notin R$ (Άτοπο)

Άρα αναγκαστικά $\boxed{x\in D(R)} \Rightarrow D(S\circ R)\subseteq D(R)$

(ii) Όμοια, έστω $\boxed{z\in R(S\circ R)} \wedge z\notin R(S)$

$\Rightarrow \exists (x,y): (x,z)\in S\circ R \wedge (y,z)\in S \Rightarrow \exists (x,y): (x,y)\in R \wedge (y,z)\in S \wedge (y,z)\notin S$ (άτοπο)

$\Rightarrow \boxed{z\in R(S)} \Rightarrow R(S\circ R)\subseteq R(S)$ □

Scanned by CamScanner

Ορισμός: Έστω A κλάση και R σχέση στο A. Τότε ονομάζουμε εικόνα του A μέσω της R και τη συμβολίζουμε ως $R^{\to}(A) = \{ y : (\exists x \in A)\ (x,y) \in R \}$

Ορισμός: Έστω B κλάση και R σχέση στο B. Τότε ονομάζουμε αντίστροφη εικόνα του B μέσω της R και συμβολίζουμε ως $R^{\leftarrow}(B) = \{ x : (\exists y \in B)\ (x,y) \in R \}$

Άσκηση 20: Έστω R, S δύο σχέσεις. Ν.δ.ο. $D(S) \subseteq D(R) \Rightarrow S \subseteq S \circ R^{-1} \circ R$

Λύση: ($\Rightarrow$) Έστω ότι $D(S) \subseteq D(R)$. Έστω $\boxed{(a,b) \in S}$

$\Rightarrow a \in D(S) \Rightarrow a \in D(R) \Rightarrow \exists t : (a,t) \in R \Rightarrow (t,a) \in R^{-1}$

Συνθέτουμε R και $R^{-1} \Rightarrow R^{-1} \circ R = \{ (a,a) : (a,t) \in R \wedge (t,a) \in R^{-1} \}$

$\Rightarrow S \circ R \circ R^{-1} = \{ (a,b) : (a,a) \in R \circ R^{-1} \wedge (a,b) \in S \} \Rightarrow \boxed{(a,b) \in S \circ R^{-1} \circ R}$

Άρα, $S \subseteq S \circ R^{-1} \circ R$

Scanned by CamScanner

ΑΣΚ 19: Έστω σ σχέση, Α κλάση. Ν.δ.ο.

$$A \subseteq D(\sigma) \iff \cancel{A \subseteq R^{-1}(R(A))}\; A \subseteq \sigma^{-1}(\sigma(A))$$

$$\sigma^{-1}(\sigma(A)) = \{x : (\exists y)\, y \in \sigma(A) \wedge (x,y) \in \sigma\}$$

Έστω $A \subseteq D(\sigma)$. Τότε για τυχόν $\alpha \in A \Rightarrow \alpha \in D(\sigma) \Rightarrow \exists b$ με $(\alpha,b) \in \sigma \Rightarrow b \in \sigma(A)$

Άρα έχουμε $b \in \sigma(A)$ και $(\alpha,b) \in \sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in \sigma^{-1}(\sigma(A))$.

$(\Leftarrow)$. $A \subseteq \sigma^{-1}(\sigma(A))$. Έστω $\alpha \in A \Rightarrow \alpha \in \sigma^{-1}(\sigma(A))$

$\Rightarrow (\exists b)\; b \in \sigma(A) \wedge (\alpha,b) \in \sigma \Rightarrow \alpha \in D(\sigma)$.

21) Έστω A, B, C, D κλάσεις, σ σχέση μεταξύ B και C.

Γενικά $\sigma \subseteq B \times C$.

Ν.δ.ο.

1) $R \circ (A \times B) = A \times R(B)$

2) $(C \times D) \circ R = R^{-1}(C) \times D$

Λύση

i) $(\alpha,b) \in R \circ (A \times B) \iff (\exists t)\; (\alpha,t) \in A \times B \wedge (t,b) \in R$

$\iff \alpha \in A \wedge \underbrace{t \in B \wedge (t,b) \in R}$

$\iff \alpha \in A \wedge b \in R(B) \iff (\alpha,b) \in A \times R(B)$

2) $(\alpha,b) \in (C \times D) \circ R \iff (\exists t)\; (\alpha,t) \in R \wedge (t,b) \in C \times D$

$\iff \underbrace{(\alpha,t) \in R \wedge t \in C} \wedge b \in D \iff (\alpha,b) \in R^{-1}(C) \times D$

$\iff \alpha \in R^{-1}(C)$

22) $\forall$ σχέση S ορίζουμε $S' = (D(S) \times R(S)) \setminus S$ και $D_A = \{(\alpha,\alpha) : \alpha \in A\}$

Ν.δ.ο.

1) $(R')^{-1} = (R^{-1})'$

2) Για κάθε κλάσεις A, B με $D(R) \subseteq A$ και $R(R) \subseteq B$ τότε: $R \circ (R^{-1})' \subseteq (D_B)'$ και $(R^{-1})' \circ R \subseteq (D_A)'$

Λύση

① $(\alpha,b) \in (R')^{-1} \iff (b,\alpha) \in R' \iff b \in D(R) \wedge \alpha \in R(R) \wedge (b,\alpha) \notin R$

$\iff \alpha \in D(R^{-1}) \wedge b \in R(R^{-1}) \wedge (\alpha,b) \notin R^{-1} \iff$

$\iff (\alpha,b) \in (R^{-1})'$.

② $(\alpha,b) \in R \circ (R^{-1})' \Rightarrow (\exists t) : (\alpha,t) \in (R^{-1})' \wedge (t,b) \in R$

$\Rightarrow (\exists t)\ (\alpha,t) \in (R')^{-1} \wedge (t,b) \in R \Rightarrow b \in R(R)$

$\Rightarrow (\exists t)\ (t,\alpha) \in R' \wedge (t,b) \in R$

$\Rightarrow t \in D(R) \wedge \alpha \in R(R) \wedge \underbrace{(t,\alpha) \notin R \wedge (t,b) \in R}$

$\Rightarrow t \in A \wedge \alpha \in B \wedge \alpha \neq b \wedge (t,b) \in R$

$\Rightarrow b \in B$

$\Rightarrow (\alpha,b) \in B \times B \setminus D_B \Rightarrow (\alpha,b) \in (D_B)'$ ✓

• Έστω $(\alpha,b) \in (R^{-1})' \circ R \Rightarrow (\exists t) : (\alpha,t) \in R \wedge (t,b) \in (R')^{-1}$

$\Rightarrow (\exists t)\ (\alpha,t) \in R \wedge (t,b) \in (R')^{-1}$

$\Rightarrow (\exists t)\ (\alpha,t) \in R \wedge (b,t) \in R'$

$\Rightarrow \alpha \in D(R) \wedge b \in D(R) \wedge (b,t) \notin R \wedge (\alpha,t) \in R$

$\Rightarrow \alpha \in A \wedge b \in A \wedge \alpha \neq b \Rightarrow (\alpha,b) \in (D_A)'$.

Scanned by CamScanner

Αξίωμα 6: Αν R συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της είναι σύνολο τότε και το πεδίο τιμών της είναι σύνολο